

ساختار کتاب

کتاب شب امتحان ریاضی و آمار (۳) دوازدهم از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

- ۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:
- الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم؛ بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.
- ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمون‌های معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.
- ۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۱۲ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:
- الف) آزمون‌های طبقه‌بندی شده:** آزمون‌های شماره ۵ تا ۸ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند؛ آزمون‌های شماره ۵، ۶، ۷ و ۸ به ترتیب امتحان نهایی خرداد، شهریور و دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱ هستند. این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای دارند.
- ب) آزمون‌های طبقه‌بندی نشده:** آزمون‌های شماره ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال مواجه خواهید شد. آزمون‌های شماره ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به ترتیب امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱، خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.
- ۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها، همه آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.
- ۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت، برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند (👉) در این قسمت، همه آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان ریاضی و آمار (۳) نیاز دارید، در ۱۴ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!
- یک راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست


صفحه	صفحه	نوبت	آزمون پاسخ‌نامه
۲۶	۳	اول (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۱
۲۷	۵	اول (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۲
۲۸	۷	اول (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۳
۲۹	۹	اول (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۴
۳۱	۱۱	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۵ نهایی خرداد ۱۴۰۰
۳۲	۱۳	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۶ نهایی شهریور ۱۴۰۰
۳۲	۱۵	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۷ نهایی دی ۱۴۰۰
۳۳	۱۷	دوم (طبقه‌بندی شده)	آزمون شماره ۸ نهایی دی ۱۴۰۱
۳۴	۱۹	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۹ نهایی خرداد ۱۴۰۱
۳۵	۲۱	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۰ نهایی خرداد ۱۴۰۲
۳۶	۲۳	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۱ نهایی شهریور ۱۴۰۱
۳۷	۲۴	دوم (طبقه‌بندی نشده)	آزمون شماره ۱۲ نهایی شهریور ۱۴۰۲
۳۸			درس‌نامه توپ برای شب امتحان

بارم‌بندی درس ریاضی و آمار ۳

فصل	نوبت اول	نوبت دوم (خرداد)	شهریور و دی
۱	۱۵	۵	۸
۲	۵	۵/۵	۵/۵
	—	—	—
۳	—	۹/۵	۶/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
ردیف	آزمون شماره ۱			نوبت اول پایه دوازدهم
۲		<p>۱ الف) مطابق شکل روبه‌رو به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر C برویم و برگردیم به طوری که در مسیر برگشت، از مسیر رفته شده استفاده نکنیم؟ (تمام جاده‌ها دوطرفه هستند).</p> <p>ب) جای خالی را پر کنید.</p> <p>اگر در بین داده‌ها، داده دورافتاده داشته باشیم بهتر است از شاخص مرکزی استفاده کنیم.</p>		
۱	<p>الف) $\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!}$</p>	<p>ب) $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$</p>	<p>۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:</p>	
۰/۷۵	<p>۳ مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد؟</p>			
۱/۵	<p>۴ با ارقام ۱, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸ و بدون تکرار ارقام: الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟ ب) چند عدد پنج‌رقمی فرد می‌توان ساخت؟ پ) چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت که یکان آن ۷ و صدگان آن صفر است؟</p>			
۱	<p>۵ با حروف کلمه «وساطت» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ط» ختم شود؟</p>			
۱	<p>۶ در حل مسائل پیشامدها می‌توانید از تمام قوانین مجموعه‌ها که در سال‌های قبل فوندرین، استفاده کنید.</p>		<p>الف) A رخ دهد ولی B یا C رخ ندهند. (نه B رخ دهد نه C) ب) A, B و C رخ دهند.</p>	
۱/۵	<p>۷ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» ظاهر شد آن گاه تاسی را می‌ریزیم در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. ب) پیشامد A را که در آن، عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا حداقل یکی از سکه‌ها پشت بیاید با اعضا مشخص کنید.</p>			
۲	<p>۸ از جعبه‌ای که شامل ۱۰ سیب سالم و ۴ سیب لکه‌دار است، ۳ سیب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال این‌که: الف) هر ۳ سیب سالم باشند. ب) ۲ سیب خراب باشند. پ) تعداد سیب‌های سالم یکی بیشتر از لکه‌دارها باشد.</p>			
۳	<p>۹ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم احتمالات زیر را حساب کنید: الف) اعداد ظاهر شده، یکسان باشند. (پیشامد A) ب) مجموع اعداد ظاهر شده، ۴ باشد. (پیشامد B) پ) حاصل ضرب اعداد ظاهر شده، کم‌تر از ۳۷ باشد. (پیشامد C)</p>			
۱/۲۵	<p>۱۰ گام‌های مختلف چرخه آمار در حل مسائل را فقط نام ببرید.</p>			

	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
نمره	آزمون شماره ۱			ردیف
۱	<p style="text-align: right;">فصل دوم</p> <p>جاهای خالی را پر کنید. الف) یک دنباله، نوعی تابع است که دامنه آن است. ب) رابطه بازگشتی دنباله $1, -1, 2, -4, 8, \dots$ برابر با است.</p>			۱۱
۱/۲۵	<p>اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر کدام از آن‌ها را مشخص کنید. الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین ب) میزان ساعات مطالعه دانش‌آموزان یک کلاس براساس شماره هر دانش‌آموز در لیست کلاس پ) حجم مکعبی به ضلع x سانتی‌متر ت) تغییرات سطح آب یک دریاچه در ۱۰ سال اخیر ث) میزان مصرف ماهانه برق آپارتمان‌های با شماره ۱ تا ۱۰۰ یک مجتمع</p> <p> <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{R} <input type="checkbox"/> زیرمجموعه \mathbb{N} </p>			۱۲
۱/۵	<p>الف) برای دنباله $2, 7, 12, 17, \dots$ هم ضابطه تابعی و هم رابطه بازگشتی بنویسید. ب) برای دنباله $16, 3, 16, 3, 16, \dots$ یک رابطه دوضابطه‌ای بنویسید.</p>			۱۳
۱/۲۵	<p>اگر $a_n = \frac{n^2}{(-1)^n}$، $b_n = 4$ و $c_n = 4 + (-1)^n$ باشند، حاصل عبارت زیر را به دست آورید. $a_1 + b_8 - c_7 = ?$</p>			۱۴
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید

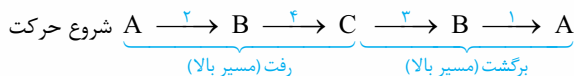
	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)
نمره	<p style="text-align: center;">آزمون شماره ۹</p> <p style="text-align: center;">نوبت دوم پایه دوازدهم - خرداد ۱۴۰۱</p>			ردیف
۱	<p>درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) حاصل $\frac{8!}{4!}$ برابر ۲! است.</p> <p>ب) احتمال روشن شدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس برابر صفر است.</p> <p>پ) در دنباله $a_{n+1} = a_n + 3$، اگر جمله پنجم ۱۷ باشد، جمله ششم آن ۲۳ است.</p> <p>ت) نمایش $\sqrt{-7}$ را به صورت $\sqrt[3]{-7}$ می‌توان نوشت.</p>			۱
۰/۷۵	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>الف) فضای نمونه برای ترکیب جنسیت فرزندان خانواده‌ای با ۳ فرزند، چند عضو دارد؟</p> <p>ب) احتمال این که فردا بارانی باشد، $0/01$ است. احتمال این که فردا بارانی نباشد، چه قدر است؟</p> <p>پ) تفسیر نتایج به دست آمده، کدام گام در چرخه حل مسائل آماری است؟</p> <p>۱) بیان مسئله ۲) گردآوری داده‌ها ۳) تحلیل داده‌ها ۴) بحث و نتیجه‌گیری</p>			۲
۰/۵	<p>مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $\left(\frac{5}{3}\right)$ باشد.</p>			۳
۰/۵	<p>کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟</p> <p>الف) مشاهده عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن، عدد ۳ حک شده باشد.</p> <p>ب) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سؤالات آن را شانسی پاسخ داده‌ایم.</p>			۴
۱/۵	<p>از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، به تصادف ۲ مهره انتخاب می‌کنیم. احتمال این که هر دو مهره سفید باشد را محاسبه کنید.</p>			۵
۱/۲۵	<p>داده‌های مقابل، میزان حقوق ماهیانه (برحسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد:</p> <p>الف) دامنه تغییرات و میانه داده‌های بالا را به دست آورید.</p> <p>ب) آیا میانه، معیار گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌ها است؟ چرا؟</p>			۶
۱/۷۵	<p>الف) چهار جمله اول دنباله $a_n = 3n + 2$ را بنویسید.</p> <p>ب) رابطه بازگشتی دنباله $5, 11, 17, \dots$ را بنویسید.</p>			۷
۲	<p>در یک دنباله حسابی، جمله اول ۵ و اختلاف مشترک برابر ۷ است.</p> <p>الف) جمله یازدهم این دنباله را به دست آورید.</p> <p>ب) کدام جمله دنباله، برابر ۹۶ است؟</p>			۸
۱/۵	<p>در دنباله حسابی $3, 7, 11, 15, \dots$ مجموع بیست جمله اول این دنباله را به دست آورید.</p>			۹
۱	<p>کدام یک از دنباله‌های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، نسبت مشترک را به دست آورید.</p> <p>الف) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$</p> <p>ب) $1, 4, 9, 16, \dots$</p>			۱۰
۲	<p>جمله دوم یک دنباله هندسی، ۶ و جمله پنجم همین دنباله، ۴۸ است.</p> <p>الف) نسبت مشترک این دنباله را پیدا کنید.</p> <p>ب) جمله هفتم این دنباله را بنویسید.</p>			۱۱
۱	<p>عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید.</p> <p>الف) $\sqrt[5]{12^3}$</p> <p>ب) $(0/24)^{\frac{2}{7}}$</p>			۱۲
۱	<p>در تساوی $8^x \times 8^3 = 8^1$، مقدار x را مشخص کنید.</p>			۱۳

	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ادبیات و علوم انسانی	ریاضی و آمار (۳)								
نمره	نوبت دوم پایه دوازدهم - خرداد ۱۴۰۱		آزمون شماره ۹									
۱/۵	<p>۱۴ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به سادهترین صورت ممکن بنویسید.</p> <p>الف) $(15^6)^{\frac{1}{2}}$ ب) $11^{\frac{2}{5}} \times 6^{\frac{2}{5}}$ پ) $4^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{1}{3}}$</p>											
۱/۵	<p>۱۵ تابع نمایی $y = 2^x$ را در نظر بگیرید:</p> <p>الف) جدول مقابل را کامل کنید.</p> <table border="1" data-bbox="124 411 529 519"> <tr> <td>x</td> <td>-۱</td> <td>۰</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>y = 2^x</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>ب) نمودار مختصاتی $y = 2^x$ را رسم کنید.</p>				x	-۱	۰	۱	y = 2 ^x			
x	-۱	۰	۱									
y = 2 ^x												
۱/۲۵	<p>۱۶ جمعیت شهری در سال ۱۴۰۰ شمسی، حدود دو میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این شهر به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۱۰ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۱ چند نفر خواهد بود؟</p>											
۲۰	جمع نمرات			موفق باشید								

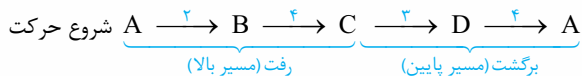
پاسخ‌نامه تشریحی

آزمون شماره ۱ (نوبت اول)

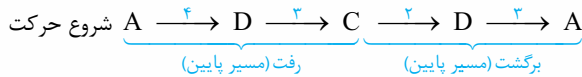
۱- الف) ۴ حالت برای رفت و برگشت از A به C و برعکس وجود دارد:



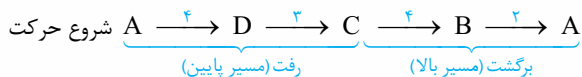
تعداد حالت‌ها = $2 \times 4 \times 3 \times 1 = 24$



تعداد حالت‌ها = $2 \times 4 \times 3 \times 4 = 96$



تعداد حالت‌ها = $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$



تعداد حالت‌ها = $4 \times 3 \times 4 \times 2 = 96$

طبق اصل جمع \rightarrow تعداد کل حالت‌ها = $24 + 96 + 72 + 96 = 288$

ب) میان

$$\frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times \cancel{7} \times \cancel{6!}}{2 \times 1 \times \cancel{6!}} = \frac{8}{2} = 4$$

۲- الف)

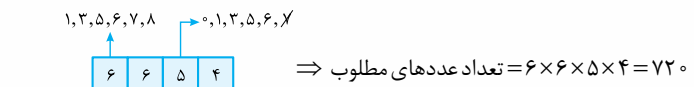
ب) $(n+3)$ بزرگ‌تر از $(n+1)$ است، پس آن را باز می‌کنیم تا به $(n+1)$ برسیم:

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2)$$

۳- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$ مجموعه A دارای ۶ عضو است، پس خواهیم نوشت:

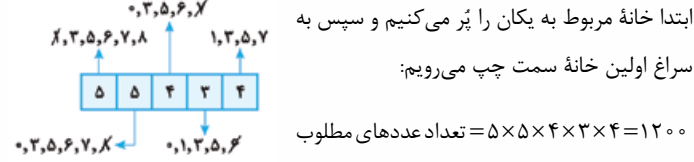
$$2 = \frac{6!}{(6-3)! \times 3!} = \frac{6!}{(3! \times 3!)} \Rightarrow \frac{\cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3!}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1} \times \cancel{3!}} = 20$$

۴- الف) شرط خاص نداریم پس پُر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم:

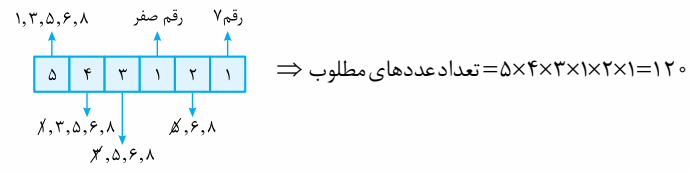


ب) عددی فرد است که یکان آن فرد باشد، پس

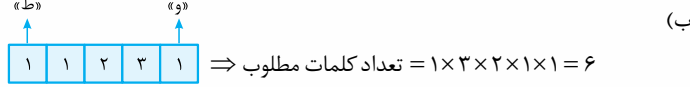
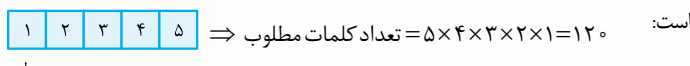
ابتدا خانهٔ مربوط به یکان را پُر می‌کنیم و سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم:



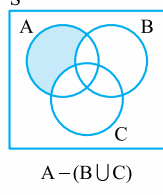
پ) یکان فقط باید ۷ باشد پس برای آن فقط یک انتخاب وجود دارد. در مورد صدگان نیز فقط یک انتخاب (رقم صفر) داریم، پس ابتدا این دو خانه را پُر می‌کنیم سپس به سراغ اولین خانهٔ سمت چپ می‌رویم و پُر کردن خانه‌ها را ادامه می‌دهیم:



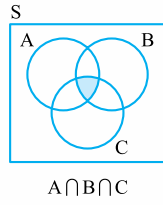
۵- الف) بهتر است خانه‌ها را از راست به چپ پُر کنیم چون کلمهٔ «واسط» به زبان فارسی



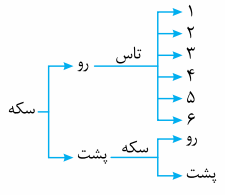
۶- الف) فقط باید A رخ دهد یعنی باید قسمتی از A را رنگ کنیم که با B یا C اشتراک نداشته باشد:



ب) می‌خواهیم هر ۳ پیشامد با هم رخ دهند. لذا قسمت مشترک A, B و C را رنگ می‌کنیم:



۷- الف) بهتر است یک نمودار درختی برای این مسئله رسم کنیم:



فضای نمونه $S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), \dots, (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), \dots, (پ, ۶)\}$

پیشامد مطلوب $A = \{(ر, ۲), (ر, ۴), (ر, ۶), (پ, ۲), (پ, ۴), (پ, ۶)\}$

حداقل یکی از تاس‌ها پشت بیاید عدد تاس زوج باشد

۸- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را محاسبه می‌کنیم:

$$n(S) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \times 3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times 3 \times 2 \times 1} = 364$$

الف) $n(A) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{364}$

ب) وقتی ۲ سیب خراب است پس سیب سوم سالم است؛ لذا داریم:

$$n(A) = \binom{4}{2} \times \binom{10}{1} = 6 \times 10 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{60}{364}$$



۳- الف) باید از فرمول تبدیل استفاده کنیم:

$$P(9, 4) = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 3024$$

ب) باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

$$C(9, 4) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

۴- الف) فرزندان اول و سوم پسر هستند ولی فرزندان دوم و چهارم می‌توانند دختر یا پسر باشند. (چون در متن سؤال، چیزی در مورد آن‌ها گفته نشده است.)

$$A = \{(پ, پ, د, د), (پ, د, پ, د), (د, پ, پ, د), (د, د, د, د), (پ, پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(A) = 4$$

ب) گفته شده فقط فرزندان اول و سوم پسر هستند، پس فرزندان دوم و چهارم حتماً دختر هستند، لذا:

$$B = \{(پ, د, پ, د), (د, پ, د, د)\} \Rightarrow n(B) = 1$$

$$n(S) = 2^4 = 16 \quad (پ)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{16}$$

۵- ابتدا پیشامدها را با اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

قرمز آبی
↑ ↑

$$B = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\}$$

$$C = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$$

الف) A و B سازگارند چون اشتراکشان تهی نیست $A \cap B = \{(5, 5)\}$ به همین ترتیب A و C هم سازگارند $A \cap C = \{(3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ ولی B و C ناسازگارند چون عضو مشترک ندارند.

$$A \cap B = \{(5, 5)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \quad (ب)$$

$$B - C = \{(4, 6), (6, 4), (5, 5)\} \Rightarrow n(B - C) = 3$$

$$n(S) = 6^2 = 36 \quad (پ)$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

$$P(B - C) = \frac{n(B - C)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \Rightarrow n(S) = 8 \quad -۶$$

$$A = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{8}$$

عدد اول یا فرد باشد

$$B = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

عدد کوچک‌تر یا مساوی ۴ باشد

۷- در مسائل تاریخ تولد، هرگاه از کلمه «لااقل» یا «حداقل» استفاده شود متوجه می‌شویم که باید از پیشامد متمم استفاده کنیم: (متولد شدن حداقل ۲ نفر در یک روز هفته)

$$= 1 - P(\underbrace{\text{متولد شدن ۳ نفر در روزهای مختلف هفته}}_{A'})$$

$$P(A) = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{30}{49} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{30}{49} = \frac{19}{49}$$

۸- میانگین زمان مطالعه در هر سه کلاس با هم برابر است، پس پراکندگی در کلاسی

$$\sigma_A = 15 - 14 = 1$$

$$\sigma_B = 16 - 14 = 2 \Rightarrow \sigma_C > \sigma_B > \sigma_A$$

$$\sigma_C = 17 - 14 = 3$$

پ) باید ۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب انتخاب شود:

$$n(A) = \binom{10}{2} \times \binom{4}{1} = 45 \times 4 = 180 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{180}{364}$$

۹- ابتدا تعداد اعضای فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

الف) می‌خواهیم دو عدد ظاهر شده، یکسان باشند پس پیشامد مطلوب، به صورت زیر است:

$$n(S) = 6^2 = 36$$

$$A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) باید اعدادی از دو تاس را انتخاب کنیم که جمعشان ۴ شود:

$$B = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

پ) تاس‌ها هر عددی که ظاهر شوند ضربشان کمتر از ۳۷ است پس C یک پیشامد حتمی (قطعی) است و احتمال وقوع آن ۱ است. (نیاز به هیچ محاسبه‌ای نیست.)

۱۰- گام اول: بیان مسئله (فهم مسئله، تعریف دقیق مسئله)

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی (روش اندازه‌گیری، روش نمونه‌گیری، روش انجام کار)

گام سوم: گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها

گام چهارم: تحلیل داده‌ها (مرتب‌کردن داده‌ها، استفاده از شاخص‌های مرکزی و پراکندگی، استفاده از نمودارها و جدول‌ها)

گام پنجم: بحث و نتیجه‌گیری (نتیجه‌گیری، نقد و بررسی، ایده‌های جدید)

$$11- \text{الف) مجموعه اعداد طبیعی } (\mathbb{N}) \quad (ب) \quad a_{n+1} = \frac{-1}{4} a_n, a_1 = 8$$

۱۲- هر قسمت را به شکل (هم‌دامنه \rightarrow دامنه) می‌نویسیم سپس دامنه را بررسی

می‌کنیم: کاهش دما \rightarrow ارتفاع از سطح زمین (الف)

زیرمجموعه \mathbb{R} : دامنه

میزان ساعات مطالعه \rightarrow شماره هر دانش‌آموز در کلاس (ب)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

حجم مکعب \rightarrow اندازه ضلع مکعب (پ)

زیرمجموعه \mathbb{R} : دامنه

تغییرات سطح آب \rightarrow شماره سال‌های اخیر (۱۰ سال اخیر) (ت)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

میزان مصرف برق \rightarrow شماره آپارتمان‌ها (۱ تا ۱۰۰) (ث)

زیرمجموعه \mathbb{N} : دامنه

۱۳- الف) جملات دنباله ۵ تا ۵ تا زیاد می‌شوند، می‌فهمیم جمله عمومی حتماً شامل $5n$

است. حالا به جمله اول که ۲ است نگاه می‌کنیم، ۵ چگونه به ۲ تبدیل می‌شود؟ باید

۳ تا از آن کم کنیم؛ پس جمله عمومی برابر $5n - 3$ می‌شود:

$$a_n = 5n - 3 \quad (\text{ضابطه تابعی (جمله عمومی)})$$

$$a_{n+1} = a_n + 5, \quad a_1 = 2$$

زابطه بازگشتی

ب) جملات دنباله، به صورت یک‌درمیان ۱۶ و ۳ هستند، لذا یک دنباله دوضابطه‌ای داریم:

$$a_n = \begin{cases} n \text{ فرد} & 16 \\ 3 \text{ زوج} & n \end{cases}$$

$$14- \quad a_1 = \frac{1^2}{(-1)^1} = \frac{1}{-1} = -1, \quad b_1 = 4, \quad c_1 = 4 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$$

$$\Rightarrow a_1 + b_1 - c_1 = (-1) + 4 - 3 = 0$$

آزمون شماره ۲ (نوبت اول)

۱- الف) $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ (ب)

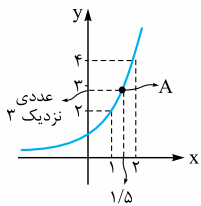
۲- الف) چون کلمات ۴ حرفی می‌خواهیم ۴ خانه می‌کشیم و آن‌ها را از راست به چپ

پر می‌کنیم: $3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$ = تعداد کلمات مطلوب \Rightarrow

ب) ۳ خانه می‌کشیم، در خانه‌های اول و آخر فقط ۱ انتخاب داریم، لذا:

حرف «س» ↑ حرف «ن» ↑

$$\Rightarrow 1 \times 4 \times 1 = 4 \text{ تعداد کلمات مطلوب}$$



از روی نمودار نقطه‌ای به طول $\frac{3}{4} = 1/5$ را که روی منحنی قرار دارد انتخاب می‌کنیم (نقطه A). عرض این نقطه، عددی نزدیک به ۳ است؛ پس می‌توان آن را مثلاً $2/8$ یا $2/9$ در نظر گرفت، ولی بدون نمودار هم می‌توان به جواب رسید. به راه حل زیر توجه کنید:

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{2^2 \times 2} = 2\sqrt[3]{2} = 2 \times 1/4 = 2/8$$

قطعاً مقدار $\sqrt{2}$ رو حفظ هستید که برابر با $1/4$ است. بد نیست بدانید که:

$$\sqrt{5} \approx 2/2, \quad \sqrt{3} \approx 1/7$$

۲۰- از فرمول زوال استفاده می‌کنیم:

$$40,000,000(1-0/01)^2 = 40,000,000 \times 0/99^2 = 39,204,000$$

آزمون شماره ۹ (نوبت دوم)

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 168$$

۱- الف) نادرست است، زیرا:

پس $\frac{8!}{4!}$ با $2!$ که همان 2 است، مساوی نیست.

ب) درست است، چون پیشامد این‌که در تاس عدد صفر بیاید غیرممکن است.

پ) نادرست است، زیرا: $a_{n+1} = a_n + 3 \xrightarrow{n=5} a_6 = a_5 + 3 = 17 + 3 = 20$

ت) نادرست است، چون نمی‌توانیم یک عدد منفی را به توان $\frac{1}{3}$ که عددی گویاست برسانیم.

۲- الف) گزینه «۲»؛ زیرا:

$$n(S) = 2^2 = 8$$

ب) گزینه «۴»

پ) گزینه «۴»

۳- به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب کرد و به دوستان هدیه بدهیم؟ (البته این‌جا جور مسائل، بی‌شمار جواب دارند.)

۴- الف) پدیده قطعی است، چون نتیجه آن، از قبل معلوم است. (همیشه عدد ۳ می‌آید.)
ب) پدیده تصادفی است، چون به برخی از سوالات پاسخ شانس داده‌ایم.

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 5!} = 21$$

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

۶- الف) برای یافتن میانه، داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$5, 6, 6, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 20, 35$$

↓
میانه=۹

$$R = \max - \min = 35 - 5 = 30$$

ب) بله، چون حقوق‌های ۲۰ و ۳۵ میلیون تومان، نسبت به بقیه حقوق‌ها خیلی بیشتر هستند و داده دورافتاده محسوب می‌شوند.

۷- الف) به n اعداد طبیعی ۱ تا ۴ را می‌دهیم:

$$a_n = 3n + 2 \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = 3(1) + 2 = 5 \\ n=2 \rightarrow a_2 = 3(2) + 2 = 8 \\ n=3 \rightarrow a_3 = 3(3) + 2 = 11 \\ n=4 \rightarrow a_4 = 3(4) + 2 = 14 \end{cases}$$

$$5, 11, 17, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی است}} d = a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 6 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

رابطه بازگشتی دنباله:

$$a_{11} = a + 10 \cdot d = 5 + 10(6) = 65$$

$$a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{\substack{a=5, d=6 \\ a_n=96}} 96 = 5 + (n-1) \times 6$$

$$\Rightarrow 96 = 5 + 6n - 6 \Rightarrow 6n = 96 - 5 + 6 \Rightarrow 6n = 97$$

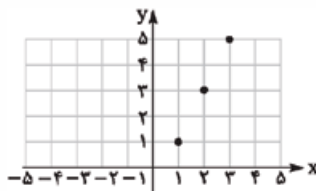
$$\Rightarrow n = \frac{97}{6} = 16$$

۸- نمی‌توان نظری داد، چون گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.
۹- نادرست است، چون دنباله داده‌شده اصلاً حسابی نیست. (عدد ۳ به همه جملات اضافه نمی‌شود.)

$$a_n = 2n - 1 \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = 2(1) - 1 = 1 \\ n=2 \rightarrow a_2 = 2(2) - 1 = 3 \\ n=3 \rightarrow a_3 = 2(3) - 1 = 5 \end{cases}$$

ب) از ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله متوجه می‌شویم که دنباله، حسابی بوده و ضمناً مقدار d برابر ۲ است. (ضریب n همان d می‌شود.)

از طرفی جمله اول که برابر ۱ است؛ لذا رابطه بازگشتی به صورت $a_{n+1} = a_n + 2$ با فرض $a_1 = 1$ می‌باشد.



$$a_1 = 1, a_4 = 7 \Rightarrow a_1 + 9d = 7 \xrightarrow{a_1=1} 9d = 6 \Rightarrow d = 2$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_5 = \frac{5}{2} [2(1) + 19(2)] = 67$$

$$b_2 - a_2 + c_2 = 2(2)^2 + 1 - \frac{2(2)-1}{2+1} + (-\frac{1}{2})^{2-1} = 19 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{37}{2}$$

$$y = 3^{-x} = \frac{1}{3^x} = (\frac{1}{3})^x$$

۱۳- درست است، چون که:

$\frac{1}{3}$ عددی بین صفر و یک است، پس نمودار

تابع $(\frac{1}{3})^x$ به شکل مقابل است و کاهشی است:



۱۴- $(-1)^0$ ؛ منظور از ریشه سوم یک عدد، رادیکال با فرجه ۳ گرفتن از آن عدد است:

$$\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{-1 \cdot 10^3} = -10$$

۱۵- می‌دانیم اگر a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشند، رابطه $b^2 = ac$

$$x^2 = (x-1)(x+3)$$

برقرار است:

$$x^2 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{27} (3)^{n-1} \Rightarrow \frac{a_8}{a_3} = \frac{\frac{1}{27} \times 3^7}{\frac{1}{27} \times 3^2} = \frac{3^5}{3^2} = 27$$

$$\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81 \Rightarrow \frac{a_8}{a_3} = \frac{81}{3} = 27$$

روش دوم:

$$\frac{x^6 \times 14^2}{3^8} = 7^8 \Rightarrow x^6 \times 14^2 = 7^8 \times 3^8$$

$$x^6 \times 14^2 = 14^8 \Rightarrow x^6 = 14^6 \Rightarrow x = 14$$

$$17^{\frac{2}{3}} \quad \text{ب) } \sqrt[3]{135}$$

۱۹- الف) به x سه عدد دلخواه مثل $-1, 0, 1$ می‌دهیم و لایه‌های آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = 2^x \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow y = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ x=0 \rightarrow y = 2^0 = 1 \\ x=1 \rightarrow y = 2^1 = 2 \end{cases}$$



x	-1	0	1
y	1/2	1	2

۲- الف) حتمی (ب) ثابت (پ) $\sqrt[4]{10}, -\sqrt[4]{10}$
 ریشه‌های چهارم عدد ۱۰ به شکل مقابل پیدا می‌شوند: $\pm\sqrt[4]{10}$ ریشه‌های چهارم ۱۰
 ۳- الف) گزینه «۴»
 ب) گزینه «۱» $IQR = Q_3 - Q_1 \Rightarrow 11 = Q_3 - 3 \Rightarrow Q_3 = 11 + 3 = 14$
 ب) گزینه «۱» نسبت هر جمله به جمله قبلی‌اش باید عددی ثابت باشد:

$$3, 6, 12, \dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{3} = 2 \\ \frac{12}{6} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله هندسی است.}$$

$$8, 4, 2, \dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{هندسی است.}$$

$$4, 8, 12, \dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{4} = 2 \\ \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{هندسی نیست.}$$

$$2, 2\sqrt{2}, 4, \dots \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{هندسی است.}$$

ت) گزینه «۲» در سمت چپ تساوی، پایه‌ها با هم مساوی هستند، پس توان‌های آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$(0.27)^{2+5+x+1} = (0.27)^{15} \Rightarrow 8+x=15 \Rightarrow x=7$$

۴- عدد باید زوج باشد؛ پس یکان می‌تواند ۲ یا ۴ یا ۸ را انتخاب کند. بعد از پر کردن خانه یکان، سراغ صدگان و سپس دهگان می‌رویم:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \text{جواب} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

۳, ۴, ۷, ۸, ۹

۵- الف) $A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

ب) تهی یا \emptyset یا $\{ \}$
 ۶- الف) حداقل ۴ نفر باید فوتبالیست باشند، یعنی ۴ نفر یا بیشتر. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت ۴ نفر فوتبالیست و ۲ نفر والیبالیست یا ۵ نفر فوتبالیست و ۱ نفر والیبالیست باید داشته باشیم.

$$n(S) = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84$$

$$n(A) = \binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{5} \binom{4}{1} = 5 \times 6 + 1 \times 4 = 34$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{34}{84}$$

ب) باید ۳ نفر فوتبالیست و ۳ نفر والیبالیست داشته باشیم:

$$n(A) = \binom{5}{3} \times \binom{4}{3} = 10 \times 4 = 40 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{40}{84}$$

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{2} = \frac{1}{2}, \quad b_1 = (3)^1 + 1 = 10$$

$$2a_1 + b_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 10 = 1 + 10 = 11$$

$$\xrightarrow{n=1} a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\xrightarrow{n=2} a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$$

۹- از روی نمودار، چند جمله اول دنباله را می‌نویسیم:

$$1, 3, 5, 7, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی داریم}} d = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

$$3, 7, 11, 15, \dots \xrightarrow{\text{دنباله حسابی است}} d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d) \xrightarrow{a=3, d=4, n=20}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2(3) + 19(4)) = 10(6 + 76) = 10 \times 82 = 820$$

۱۰- باید حاصل تقسیم هر جمله بر جمله قبلی‌اش، عددی ثابت شود:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$$

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\frac{1}{81}}{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

حاصل تمام تقسیم‌ها با هم برابر شدند؛ پس دنباله بالا هندسی است و نسبت مشترک آن همان $\frac{1}{3}$ است.

ب) $1, 4, 9, 16, \dots$
 $\frac{4}{1} = 4, \quad \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$

جواب تقسیم‌ها با هم برابر نشدند؛ پس این دنباله هندسی نیست.

۱۱- الف)

$$\begin{cases} a_5 = 48 \\ a_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{جملات را باز می‌کنیم.}} \begin{cases} ar^4 = 48 \\ ar^1 = 6 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو طرف را بر هم تقسیم می‌کنیم.}} \frac{ar^4}{ar^1} = \frac{48}{6}$$

$$\Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r^3 = 2^3 \Rightarrow r = 2$$

ب) ابتدا باید مقدار a یعنی جمله اول را به دست آوریم:

$$ar = 6 \xrightarrow{r=2} 2a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{2} = 3$$

$$a_7 = ar^6 = 3 \times 2^6 = 3 \times 64 = 192$$

$$\sqrt[5]{12^3} = 12^{\frac{3}{5}} \quad \text{ب) } (0.24)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(0.24)^2}$$

$$8^x \times 8^3 = 8^{10} \Rightarrow 8^{x+3} = 8^{10} \Rightarrow x+3=10 \Rightarrow x=7$$

$$\text{الف) } (15^6)^{\frac{1}{2}} = 15^{6 \times \frac{1}{2}} = 15^3 \quad \text{ب) } 11^{\frac{2}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}} = (11 \times 6)^{\frac{2}{3}} = 66^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{ب) } 4^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)} = 4^{\frac{1}{3}}$$

۱۵- الف) x های داده‌شده را در تابع $y = 2^x$ قرار می‌دهیم تا y های مربوط به آن‌ها به دست آید:

x	-1	0	1
$y = 2^x$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$

ب) در تابع $y = 2^x$ عدد پایه از ۱ بیشتر است؛

پس تابع افزایشی (صعودی) است:



۱۶- جمعیت در حال افزایش است؛ پس باید از فرمول رشد استفاده کنیم:

$$c = 2 \text{ (سال)}, \quad r = \frac{10}{100} = 0.1, \quad t = 1401 - 1400 = 1$$

$$f(t) = c(1+r)^t \xrightarrow{c=2, r=0.1, t=1} f(1) = 2 \times (1+0.1)^1$$

$$= 2 \times 1.1 = 2.2 \text{ میلیون نفر}$$

آزمون شماره ۱۰ (نوبت دوم)

۱- الف) نادرست؛ تعداد زیرمجموعه‌ها از فرمول ترکیب به دست می‌آید؛ لذا:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10$$

ب) درست (پ) درست

ت) نادرست؛ این سؤال نیاز به فرمول خاصی ندارد و با رسم فلش به راحتی قابل حل است:

$$a \times a \times a \text{ (جرم اولیه)} \xrightarrow{\text{بعد از گذشت نیم ساعت دیگر}} a \times a \text{ (جرم اولیه)} \xrightarrow{\text{بعد از گذشت نیم ساعت}} a \text{ (جرم اولیه)}$$

پس بعد از گذشت ۱ ساعت، جرم اولیه در عدد a^2 ضرب می‌شود نه \sqrt{a} .

درس نامه توپ برای شب امتحان

(ب) این فرد می خواهد از A به C برود و حتماً از B هم عبور کند، لذا فقط یک مسیر وجود دارد.
 $A \rightarrow B \rightarrow C$

تعداد حالت های مسیر $= 3 \times 4 = 12$

◀ **نماد فاکتوریل** ▶ فاکتوریل را با نماد «!» نشان می دهیم؛ اگر n عدد طبیعی باشد n! به صورت زیر تعریف می شود:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

یعنی برای محاسبه n! عدد n در تمام اعداد طبیعی کوچکتر از خود ضرب می کنیم. مثلاً:

$$2! = 2 \times 1 = 2, 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6, 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

ضمناً توجه کنید که $0! = 1$ و $1! = 1$ می باشد. هم چنین اگر بخواهیم کسری مانند $\frac{10!}{8!}$ را حساب کنیم لزومی ندارد $0!$ و $1!$ را تا 8 باز کنیم، چون وقت گیر خواهد بود بلکه بهتر است $10!$ را تا 8 باز کنیم، فقط حواستان باشد موقع باز کردن یک عدد هر جا متوقف شدیم، باید علامت! بگذاریم:

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 90$$

◀ **مثال** ▶ حاصل عبارت های زیر را حساب کنید:

الف) $5! - 3! = ?$

ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = ?$

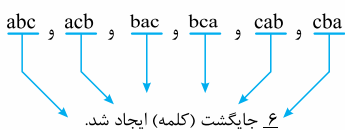
◀ **پاسخ** ▶ الف) $5! - 3! = 120 - 6 = 114$ ب) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{24 \times 120 \times 1}{40320 \times 1} = \frac{1}{14}$

دقت کنید که $(5! - 3!)$ با $2!$ برابر نمی شود.

◀ **پاسخ** ▶ الف) $\frac{4! \times 5! \times 0!}{8! \times 1!} = \frac{(4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 1} = \frac{1}{14}$

در این سؤال، دیدیم 8 به 5 نزدیک تر است تا 8 نسبت به 4. پس 8 را تا 5 باز کردیم.

◀ **جایگشت** ▶ به هر یک از حالت های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز، یک جایگشت آن n شیء می گوئیم و تعداد آن ها برابر با n! می باشد. مثلاً با حروف a, b و c می توانیم کلمات زیر را بسازیم (بدون توجه به معنی یا بی معنی بودن کلمات):



البته اگر فقط تعداد جایگشت ها را بخواهیم، می گوئیم چون 3 حرف متمایز داریم، تعداد جایگشت ها (کلمات) برابر با $3!$ می باشد: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

◀ **مثال** ▶ 5 نفر به چند حالت می توانند در یک صف قرار گیرند؟

◀ **پاسخ** ▶ طبق درس نامه گفته شده، 5 نفر به 5! حالت می توانند در یک صف قرار گیرند و می دانید که: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

روش کلی ساختن اعداد و کلمات: معمولاً برای ساختن اعداد و کلمات از روش پر کردن خانه ها استفاده می کنیم. اگر بخواهیم کلمات فارسی بسازیم، خانه ها را از راست به چپ پر می کنیم، ولی اگر بخواهیم کلمات لاتین یا اعداد را بسازیم، خانه ها را از چپ به راست پر می کنیم. البته باید به شرایط و محدودیت های سؤال، حتماً توجه کنیم؛ مثلاً اگر گفته شود عدد زوج بسازید، در جایگاه یکان (اولین خانه سمت راست) باید رقم های زوج قرار دهیم، سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ می رویم و پر کردن خانه ها را ادامه می دهیم.

فصل: آمار و احتمال

درس: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع: اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، به طوری که نتوان این دو عمل را با هم انجام داد، در این صورت این دو عمل را به $(m+n)$ طریق می توان انجام داد. حرف «یا» نشان دهنده این است که باید از اصل جمع استفاده کنیم. (اصل جمع برای بیشتر از 2 عمل هم برقرار است.) مثلاً اگر علی بتواند برای رفتن به دانشگاه از 3 خط تاکسی یا 4 خط اتوبوس یا 2 خط مترو استفاده کند، تعداد حالت های رفتن او به دانشگاه برابر است با: $3 + 4 + 2 = 9$

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله متوالی اول و دوم انجام شود، به طوری که مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم، هر یک از حالت های مرحله اول به n طریق انجام شود، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق، قابل انجام است. حرف «و» نشان می دهد که باید از اصل ضرب استفاده کنیم. توجه کنید که در اصل ضرب، ما دو یا چند عمل را به طور متوالی انجام می دهیم. یعنی همه کارها (عمل ها) با هم انجام می شوند.

مثلاً فرض کنید امیر 2 جفت کفش، 3 پیراهن و 5 شلوار دارد تعداد حالت هایی که او می تواند از کفش ها و پوشاک خود استفاده کند طبق اصل ضرب برابر است با:

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

◀ **مثال** ▶ مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم گیری درباره توسعه شرکت، 26 نفر از سهامداران را در دو گروه A و B دسته بندی می کند. 16 نفر آن ها در گروه A و بقیه در گروه B قرار می گیرند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می تواند فقط از یکی از این 26 نفر مشورت بگیرد؟
 ب) او به چند طریق می تواند از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرطی که از هر گروه با 1 نفر مشورت کند؟

◀ **پاسخ** ▶ الف) باید از اصل جمع استفاده کنیم. چون مدیرعامل فقط می تواند 1 نفر را از گروه A یا B انتخاب کند: $16 + 10 = 26$

ب) باید از اصل ضرب استفاده کنیم. چون مدیر می خواهد هم با گروه A و هم با گروه B مشورت کند؛ یعنی دو عمل را با هم انجام می دهد (به طور متوالی)؛ لذا:

$$16 \times 10 = 160$$

◀ **استفاده از اصل جمع و اصل ضرب به طور هم زمان** ▶ در بعضی از سؤالات، مخصوصاً سؤالات مربوط به سفر از یک شهر به یک شهر دیگر، هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده می کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

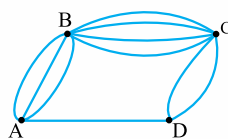
◀ **مثال** ▶ فردی می خواهد از شهر A به شهر C برود.

او به چند طریق (حالت) می تواند این کار را انجام دهد به شرطی که:

الف) محدودیت خاصی نداشته باشد.

ب) حتماً از شهر B بگذرد.

◀ **پاسخ** ▶ الف) برای رفتن از A به C دو مسیر کلی وجود دارد:



مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$: تعداد حالت ها: $3 \times 4 = 12$

مسیر $A \rightarrow D \rightarrow C$: تعداد حالت ها: $1 \times 2 = 2$

طبق اصل جمع \rightarrow تعداد کل حالت ها $= 12 + 2 = 14$



مثال: در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، تعداد اعضای فضای نمونه را به دست آورید. (در قسمت‌های الف، ب و پ اعضای S را نیز بنویسید.)

الف) پرتاب یک تاس (پرتاب یک سکه)

ب) پرتاب یک تاس و یک سکه (ت) پرتاب ۳ تاس

ث) انتخاب ۳ نفر از بین ۵ معلم و ۲ دانشجو

الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6$

ب) $S = \{ر, پ\} \Rightarrow n(S) = 2$

پ) $S = \{(\underbrace{ر, ۱}, \underbrace{ر, ۲}, \dots, \underbrace{ر, ۶}), (\underbrace{پ, ۱}, \underbrace{پ, ۲}, \dots, \underbrace{پ, ۶})\} \Rightarrow n(S) = 2 \times 6 = 12$
تاس سکه

ت) $n(S) = 6 \times 6 \times 6 = 216$

ث) $n(S) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$

پیشامد تصادفی به هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه S یک پیشامد تصادفی می‌گویند. پیشامدها را معمولاً با حروف A, B و C نمایش می‌دهیم و تعداد اعضای آن‌ها را با n(A), n(B) و n(C) نمایش می‌دهیم. به هر یک از اعضای یک پیشامد، یک برآمد از آن پیشامد می‌گویند.

مثال: در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر و تعداد اعضایشان را مشخص کنید:
الف) عدد ظاهر شده، اول باشد. (پیشامد A)
ب) عدد ظاهر شده، حداقل ۴ باشد. (پیشامد B)
پ) عدد ظاهر شده، حداکثر ۴ باشد. (پیشامد C)

الف) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ب) $A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow n(A) = 3$

پ) $B = \{4, 5, 6\} \Rightarrow n(B) = 3$

ث) $C = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n(C) = 4$

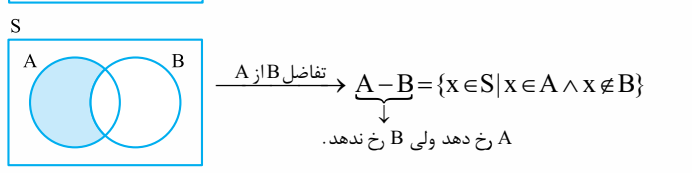
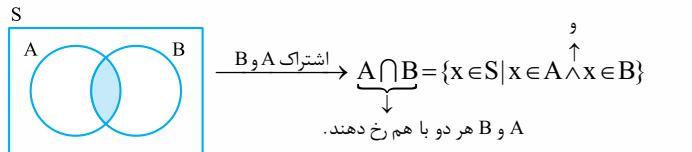
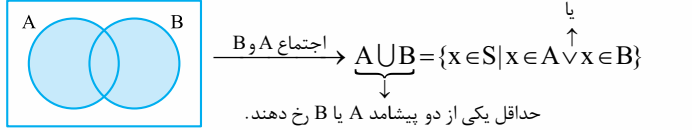
مفهوم رخ دادن یک پیشامد

فرض کنید روی چند کارت، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ را نوشته‌ایم و سپس به طور تصادفی یک کارت از بین آن‌ها انتخاب کرده‌ایم و عدد ۳ ظاهر شده است.

در این صورت به نظر آن کدما یک از پیشامدهای $A = \{3\}$ ، $B = \{2, 3\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ رخ داده است؟ الان اکثر شما می‌گویید پیشامد A ولی جواب درست‌تر این است که بگوییم تمام پیشامدهای A و B، C رخ داده‌اند چون همه آن‌ها شامل عدد ۳ می‌باشند؛ یعنی برای آن که یک پیشامد رخ دهد، کافی است فقط یکی از برآمدهای آن، ظاهر شود.

اعمال روی پیشامدها: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آن‌گاه اجتماع و اشتراک A و B، تفاضل B از A و متمم مجموعه A به صورت زیر تعریف می‌شوند:

(قسمت‌های رنگی)



نکته: تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر با $\binom{n}{r}$ می‌باشد.

مثلاً در مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی A برابر است با:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$$

نکته: برای یافتن تعداد وترها و تعداد مثلث‌های ساخته شده با تعدادی نقطه که روی محیط یک دایره قرار دارند، باز هم از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال: ۱۰ نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. با آن‌ها چند وتر و چند مثلث متمایز می‌توان ساخت؟

پاسخ: هر وتر روی دایره دارای ۲ نقطه ابتدایی و انتهایی است، لذا:

$$\text{تعداد وترها} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8! \times 2 \times 1} = 45$$

هر مثلث دارای ۳ رأس است؛ بنابراین:

$$\text{تعداد مثلث‌ها} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

انتخاب اجباری: اگر بخواهیم از بین n شیء متمایز، r شیء را انتخاب کنیم به شرطی که k شیء به خصوص حتماً انتخاب شوند، باید (r - k) شیء از بین (n - k) شیء باقی‌مانده انتخاب کنیم یعنی تعداد حالت‌های ممکن برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ می‌باشد.

مثال: مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ چند زیرمجموعه ۳ عضوی دارد که همگی آن‌ها شامل g باشند؟

پاسخ: می‌خواهیم g در تمام زیرمجموعه‌ها باشد، پس یک انتخاب اجباری داریم:

$$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 15$$

درس ۲: احتمال

پدیده‌های قطعی و تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از این که کدام نتیجه، قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، یک برآمد از فضای نمونه می‌گویند. مثلاً در پرتاب یک تاس به هر یک از اعضای مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 6\}$ یک برآمد از فضای نمونه می‌گویند. ضمناً به مجموعه شامل تمام نتایج ممکن، فضای نمونه آزمایش می‌گویند و آن را با S نمایش می‌دهیم. تعداد عضوهای S را با n(S) نمایش می‌دهیم. معمولاً لازم نیست تمام اعضای S را بنویسیم، چون عملی وقت‌گیر است. فقط کافی است n(S) را به دست آوریم.

مثال: قطعی یا تصادفی بودن پدیده‌های زیر را مشخص کنید.

الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ۱۰ سال باشد در کلاس دوازدهم یک مدرسه روزانه
ب) پرتاب سکه در مسابقه فوتبال توسط داور برای تعیین مالکیت توپ
پ) خارج شدن ۱ مهره سفید از کیسه‌ای شامل ۴ مهره سفید (با چشم بسته یک مهره را انتخاب کرده‌ایم).

ت) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش «رو» و تاسش زوج بیاید، برنده است. تعیین برنده، قبل از بازی، پدیده‌ای قطعی است یا تصادفی؟

پاسخ: الف) پدیده قطعی است، چون تمام دانش‌آموزان کلاس دوازدهم این مدرسه بالای ۱۰ سال سن دارند.

ب) پدیده تصادفی است؛ چون نمی‌دانیم سکه «رو» می‌آید یا «پشت».

پ) پدیده قطعی است؛ چون رنگ مهره انتخابی حتماً سفید است و از قبل قابل پیش‌بینی است.

ت) پدیده تصادفی است؛ چون نمی‌توانیم بگوییم حتماً سکه «رو» و تاس «زوج» می‌آید.